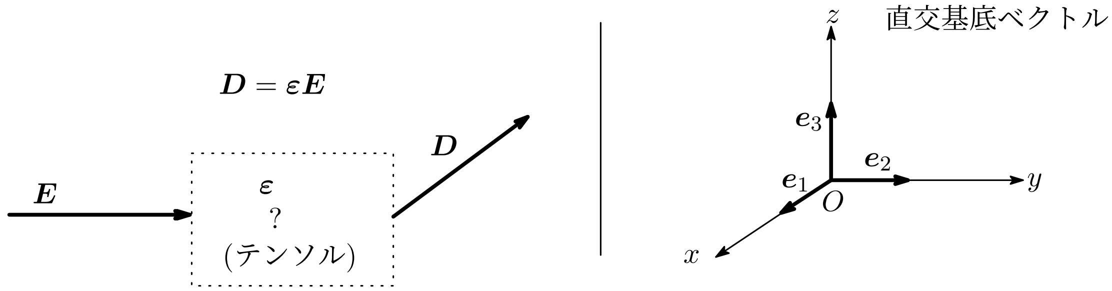
第1話　テンソルとはなんだ

1.1　テンソルとはなんだ

- エミリー：こんにちわ〜K さん，お元気ですか〜.
- K氏：いやぁ〜エミリー，こんにちは．ずいぶん久しぶりだねぇ〜．少し日焼けしているようだけどこの夏を十分エンジョイしたようだね.
- エミリー：そうなの，今年の猛暑はこたえたけど山に行ったりいろいろと野外活動に精をだしたから少し日焼けしたかな.
- K氏：ところで今日はなんだい．僕の淹れる旨いコーヒーでも飲みたくなったのかい，歓迎するよ.
- エミリー：ありがとう．でもとくにコーヒーが飲みたくてきたわけじゃないの．実は最近テンソルというものを勉強し始めたのだけど，ベクトルとちがってイメージがつかみにくいのよ．そこをスッキリしたくて K さんを尋ねてきたというわけなの.
- K氏：そういうことなんだ，了解．ところで夏場の海辺はパラソルが一杯開くけど，パラソルとテンソルとは直接何の関係もないよね.
- エミリー：ほとんど面白くない冗談はそのくらいにして，お話を進めていただけるかしら,,,
- K氏：（うっふぉーんと咳払いして）そうだね．さて，それではまずテンソルというもののイメージを掴むところから始めようか．電磁気学を勉強すると誘電率テンソルというものにでくわしたりするだろう．今，誘電体の電束密度を $\boldsymbol{D}$，電場を $\boldsymbol{E}$ とすると，え〜っと，これらはともにベクトル量であることはいいよね．誘電体が等方性の時には，電場と電束密度の方向は一致するから

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

となって，誘電率 ε は向きも方向も持たない，大きさだけを持つスカラー量だ．ここまではいいよね．問題は誘電体が異方性の時なんだね．このときにはベクトル $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ の方向は一致しなくなる．だから，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ を結び付ける ϵ は単なるスカラー量ですよとは言ってられなくなる.



だからなんだということになるんだが，つまりテンソルはベクトルとベクトルを結びつけるブラックボックスのようなものだね．このブラックボックスは一体どのようなものか，これを追求していこう．

- エミリー：なにかわくわくしてきたわ．楽しみね．

1.1.1 線形条件

- K氏：さて，ブラックボックスの意味を明らかにしていくために，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ の関係を一般化した議論を展開しておこう．いま x, y, z の空間座標系を基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ とする直交座標系としよう．もっとも，座標系としては x 軸, y 軸, z 軸 がそれぞれ斜めに交差している斜交座標というのもあるけど．この座標系についての議論は後でやることにする．ベクトル $\boldsymbol{y}$ がベクトル $\boldsymbol{x}$ の関数であるとして

$$\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x} \tag{1.1.1}$$

と書くことにする．$\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ と書くこともある．ベクトル $\boldsymbol{x}$ が与えられると別のベクトル $\boldsymbol{y}$ が得られるという関係だね．そしてベクトル変数の関数 T は線形関数，つまり

$$\begin{aligned} &T(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = T\boldsymbol{x}_1 + T\boldsymbol{x}_2 \\ &T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T\boldsymbol{x} \qquad (\alpha : \text{スカラー}) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

という線形条件を満たすものとする．言い換えるとベクトル空間からベクトル空間への線形写像ということだね．ベクトル $\boldsymbol{x}$ は直交基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を使うと

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.1.3}$$

と表せる．同様にベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ も

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} y_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.1.4}$$

と表せる．そうすると (1.1.1) の右辺は線形条件により

$$T\boldsymbol{x} = T(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{x}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3) = x_1T\boldsymbol{e}_1 + x_2T\boldsymbol{e}_2 + x_3T\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_iT\boldsymbol{e}_i \tag{1.1.5}$$

となる．

1.1.2 2 階テンソル

- K氏：ところで右辺の $T\boldsymbol{e}_i$ は (1.1.1) に見るように基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ をあるベクトル $\boldsymbol{f}_i$ に変換したものと考えられるので，$\boldsymbol{f}_i$ を基底 $\boldsymbol{e}_i$ を使って表すと

$$\left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= T\boldsymbol{e}_1 = T_{11}\boldsymbol{e}_1 + T_{21}\boldsymbol{e}_2 + T_{31}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{f}_2 &= T\boldsymbol{e}_2 = T_{12}\boldsymbol{e}_1 + T_{22}\boldsymbol{e}_2 + T_{32}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{f}_3 &= T\boldsymbol{e}_3 = T_{13}\boldsymbol{e}_1 + T_{23}\boldsymbol{e}_2 + T_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \right. \longrightarrow T\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{3} T_{ij}\boldsymbol{e}_j \quad (j = 1, 2, 3) \tag{1.1.6}$$

となるだろう．ここで T_{ij} という量はベクトル $\boldsymbol{f}_i(=T\boldsymbol{e}_i)$ の成分と考えられる．さて，ベクトル $\boldsymbol{y}$ との対応だけど

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} y_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i T \boldsymbol{e}_i
&= x_1(T_{11}\boldsymbol{e}_1 + T_{21}\boldsymbol{e}_2 + T_{31}\boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + x_2(T_{12}\boldsymbol{e}_1 + T_{22}\boldsymbol{e}_2 + T_{32}\boldsymbol{e}_3) \\
&\quad + x_3(T_{13}\boldsymbol{e}_1 + T_{23}\boldsymbol{e}_2 + T_{33}\boldsymbol{e}_3) \\
&= (x_1T_{11} + x_2T_{12} + x_3T_{13})\boldsymbol{e}_1 + (x_1T_{21} + x_2T_{22} + x_3T_{23})\boldsymbol{e}_2 + (x_1T_{31} + x_2T_{32} + x_3T_{33})\boldsymbol{e}_3 \\
\therefore\ y_1 &= x_1T_{11} + x_2T_{12} + x_3T_{13} \\
y_2 &= x_1T_{21} + x_2T_{22} + x_3T_{23} \\
y_3 &= x_1T_{31} + x_2T_{32} + x_3T_{33}
\end{aligned}
\tag{1.1.7}
$$

となるね．まとめて書くと

$$
\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x} \quad : \quad y_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}x_j \quad \longrightarrow \quad y_i = T_{ij}x_j \tag{1.1.8}
$$

右側の表式は一つの項の中に同じ添字が 2 回現れた場合その添字について和をとるというアインシュタインの規約を使っている．(1.1.8) を行列で表すと

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1.1.9}
$$

となる．ここに登場した T_{ij} という量は 2 階テンソルと呼ばれる．なぜ 2 階かというと添字が 2 つ付いているからなんだ．添字 i, j の組み合わせは合計 3×3 あって 2 階テンソルは 9 成分ということになるね．つまり，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を構成する 3 個の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ がそれぞれまた 3 個の成分をもつベクトルに変換されるので成分の数は $3 \times 3 = 9$ 個となるわけだ．ベクトル $\boldsymbol{x}$ をベクトル $\boldsymbol{y}$ に変換（射影）するにはかなりきめ細かな対応が必要になるというようなイメージだね．3 階や 4 階，一般に n 階テンソルというのもあるけど，高階テンソルについてはまた後で話がでてくると思う．以上で冒頭に言ったブラックボックスの中身が少し分かってもらえたかな？

- エミリー：そうねぇ〜，テンソルというのはベクトルをベクトルに変換する演算子のようなものね．
- K氏：そうだね．ただ，老婆心ながらコメントしておくと，テンソルはベクトルに作用する演算子というだけじゃないんだね．テンソルそれだけで独立に存在する概念でもあるんだ．エッ？何のことと思うかもしれないけど，まぁおいおい勉強していくことにするので，今はテンソルに慣れ親しむことをメインにしているので，その辺りのことは気にかけないで頂戴．
- エミリー：分かったわ．ところで 2 階テンソルは 3 行 3 列の行列で表せたけど，各成分は具体的に表されるのかしら？
- K氏：うん，それを考えるには (1.1.6) を取り上げればいい．例えばテンソル T_{13} の成分を摘みだすには (1.1.6) より基底ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ とベクトル $T\boldsymbol{e}_3$ の内積をとればいい，つまり

$$
T_{13} = \boldsymbol{e}_1 \cdot T\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \cdot (T_{13}\boldsymbol{e}_1 + T_{23}\boldsymbol{e}_2 + T_{33}\boldsymbol{e}_3) = T_{13}
$$

となるだろう．

- エミリー：ナルホド．そうすると直交基底系 $\boldsymbol{e}_i$ に関してのテンソル T の成分 T_{ij} は

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot T\boldsymbol{e}_j \tag{1.1.10}$$

と表される．テンソル成分はスカラーね.

- K氏：そうだね，いままでのお話を整理すると次のようになる.

(1) 2 階テンソルは任意のベクトルを別のベクトルに変換する線形変換の作用素として定義される．ある変換を T として，任意のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とするとき,

$$\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x} \tag{1.1.11}$$

によってベクトル $\boldsymbol{x}$ が他のベクトル $\boldsymbol{y}$ に変換され，かつこの関係が線形条件 (1.1.2) を満たすとき T をテンソルと呼ぶ.

(2) 直交基底系 $\boldsymbol{e}_i$ に関してのテンソル T の成分 T_{ij} は

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot T\boldsymbol{e}_j \tag{1.1.12}$$

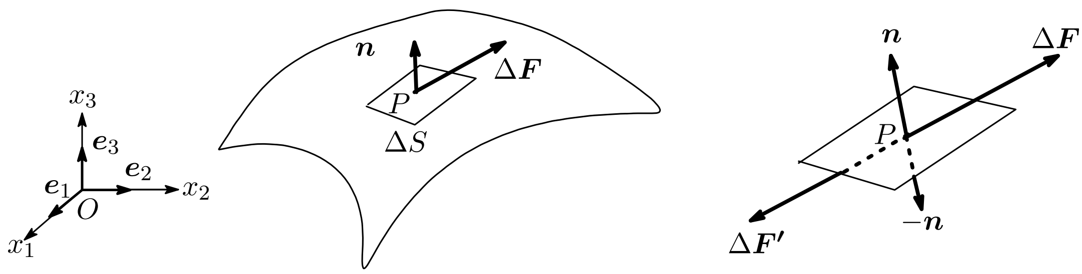
で与えられるスカラー量で，テンソル T を使うとベクトル $\boldsymbol{y}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ と

$$y_i = T_{ij}x_j \tag{1.1.13}$$

という関係で結ばれるということだね.

1.1.3 応力テンソル

- K氏：以上でテンソルの大体のイメージがつかめたと思うけど，もう一つ念押しとして応力テンソルというのを見てみよう．絵でも描きながらゆっくり考えていけばいいと思う．ある物体に作用する外力はベクトルで与えられる．物体内部の任意の断面を考えたとき，この単位面積当たりにおよぼしあう力 (応力) もベクトルだけど，ただ断面のとりかたによってこのベクトルは変化するから，応力を完全に決定するにはもっと多くの成分が必要になってくるんだね．具体的に見ていこう.



物体の内部に微小断面 ΔS を考え，ΔS の向きを表す単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．$\boldsymbol{n}$ は ΔS の下部から上部に向くように選ぶ．微小断面 ΔS に作用している面積力を ΔF とすると，点 P における応力ベクトル $\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T} = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

で与えられる．ただし，応力ベクトル $\boldsymbol{T}$ は ΔS が変われば，言い換えると単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が変われば異なるベクトルになるし，また ΔS の大きさが変化するとベクトル $\boldsymbol{T}$ の大きさも変化すると考えられるので，正確に言えば点 P における応力ベクトルは $\boldsymbol{n}$ の指定も含めて

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \tag{1.1.14}$$

と表すべきだね．

さて，いま物体の変形は小さいと仮定して，外力が加わっても物体内の点は移動しないとしよう．そうすると点 P は動いていない，つまり ΔS を通して上部の物質が下部の物質に及ぼす力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ と下部の物質が上部の物質に及ぼす力 $\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{n})$ の合力は 0 ということだ．

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{n}) = 0 \longrightarrow \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) \tag{1.1.15}$$

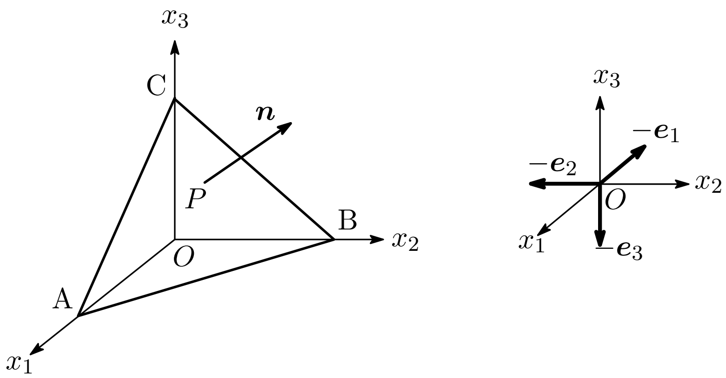
議論を進めていく前にチョッと準備をしておく．いま，空間内にある直交座標系 x_1, x_2, x_3 を定めて，その基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ としよう．点 P を通り $\boldsymbol{e}_1$ を法線ベクトルとする x_2x_3 平面内の微小断面を用いて得られた応力ベクトルを $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)$ としよう．そうすると $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)$ は基底ベクトルを使って

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) = \tau_{11}\boldsymbol{e}_1 + \tau_{21}\boldsymbol{e}_2 + \tau_{31}\boldsymbol{e}_3 \tag{1.1.16}$$

と表すことができる．同様に，$\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ を法線ベクトルとする微小断面に対する応力ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) &= \tau_{12}\boldsymbol{e}_1 + \tau_{22}\boldsymbol{e}_2 + \tau_{32}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3) &= \tau_{13}\boldsymbol{e}_1 + \tau_{23}\boldsymbol{e}_2 + \tau_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

と表せる．ここまではいいよね．以上の準備をもとに， 図のように単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の微小断面 $\triangle$ABC を考え，$\triangle$ABC と x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 の三つの座標平面とによって囲まれた四面体の微小体積要素 OABC を考えよう．



四面体の各面 $\triangle$ABC, $\triangle$OBC, $\triangle$OCA, $\triangle$OAB の面積をそれぞれ $\triangle S, \triangle S_1, \triangle S_2, \triangle S_3$ とし，それぞれの面の外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$, $-\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2$, $-\boldsymbol{e}_3$ とする．$\triangle S_1, \triangle S_2, \triangle S_3$ は $\triangle S$ の各座標平面上への正射影の面積となるので

$$\triangle S_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{n} \triangle S, \quad \triangle S_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{n} \triangle S, \quad \triangle S_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{n} \triangle S \tag{1.1.18}$$

と表すことができるよね．いま，四面体微小体積要素に作用している面積力は釣り合っているので (釣り合っていなければ動いてしまう) その合力は 0 だ．つまり

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})\triangle S + \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{e}_1)\triangle S_1 + \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{e}_2)\triangle S_2 + \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{e}_3)\triangle S_3 \\ &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})\triangle S - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)\triangle S_1 - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2)\triangle S_2 - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3)\triangle S_3 = 0 \\ \therefore\ &\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})\triangle S = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)\triangle S_1 + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2)\triangle S_2 + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3)\triangle S_3 \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

これに (1.1.18) を入れると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{n})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{n})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n})\\ &= \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1)n_1+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2)n_2+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_3)n_3\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

が得られる．n_1, n_2, n_3 は $\boldsymbol{n}$ の x_1, x_2, x_3 方向の成分だね． いま応力ベクトル $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ の成分を $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ とすると，(1.1.20) に (1.1.16) と (1.1.17) を入れて整理すれば

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1\boldsymbol{e}_1+\mathcal{T}_2\boldsymbol{e}_2+\mathcal{T}_3\boldsymbol{e}_3 &= (\tau_{11}n_1+\tau_{12}n_2+\tau_{13}n_3)\boldsymbol{e}_1\\ &\quad+(\tau_{21}n_1+\tau_{22}n_2+\tau_{23}n_3)\boldsymbol{e}_2\\ &\quad+(\tau_{31}n_1+\tau_{32}n_2+\tau_{33}n_3)\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

となる．各基底ベクトルは 1 次独立なので両辺の各基底の係数は等しくなければならない．したがって

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 &= \tau_{11}n_1+\tau_{12}n_2+\tau_{13}n_3\\ \mathcal{T}_2 &= \tau_{21}n_1+\tau_{22}n_2+\tau_{23}n_3\\ \mathcal{T}_3 &= \tau_{31}n_1+\tau_{32}n_2+\tau_{33}n_3\end{aligned} \tag{1.1.22}$$

となる．これを行列形式で表すと

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix}\mathcal{T}_1\\ \mathcal{T}_2\\ \mathcal{T}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23}\\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\\ n_3\end{pmatrix} = T\boldsymbol{n} \tag{1.1.23}$$

と書けるね．この式を見ると，まず $\boldsymbol{n}$ について線形であることが分かる．また，T はベクトル $\boldsymbol{n}$ に作用してベクトル $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ に変換している，ということで T は 2 階テンソルになるんだね．このテンソルを応力テンソルと呼んでいる．応力テンソル τ_{ij} の各成分の意味だけど，最初の添え字 i は応力成分 $T_k(k=1,2,3)$ を考えている微小面の法線の向きを表しており、2 つ目の添字 j は考えている微小面に作用する力の向きをそれぞれ表しているんだね.

- エミリー：例えば、τ_{11} だったら法線の方向が x_1 軸の向きに一致する微小面，これは x_2x_3 面ね，その面において考えている x_1 軸方向の力の成分で，τ_{12} だったら，法線の方向が x_1 軸の向きに一致する微小面において考えている x_2 軸方向の力の成分を意味するということね。

- K氏：そうだね．だから、応力テンソルの成分には、微小面の法線と力の作用方向が一致する垂直応力成分 τ_{ii} と、法線方向と力の作用方向が異なるせん断応力成分 $\tau_{ij}(i\neq j)$ の 2 種類に分類することができるんだね。

- エミリー：なるほどねぇ〜，具体的なお話でテンソルというもののイメージがだいぶんハッキリしてきたわ.

- K氏：そうかい，それじゃついでにもう少し突っ込んで,,, (1.1.23) を見てみよう．応力ベクトル $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ の表記はいちいち面倒なので $\boldsymbol{T}$ で表すことにしておくと

$$\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{n} \tag{1.1.24}$$

応力ベクトル $\boldsymbol{T}$ とベクトル $\boldsymbol{n}$ の内積は $\boldsymbol{T}$ の $\boldsymbol{n}$ 方向の成分となるよね．従って内積をとることで $\boldsymbol{T}$ の $\boldsymbol{n}$ の方向成分のみを抽出することができる．その成分を $\boldsymbol{T}_n$ とすると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{n}^t\boldsymbol{T} = \boldsymbol{n}^t T\boldsymbol{n} &= \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\
&= \tau_{11}n_1^2 + \tau_{22}n_2^2 + \tau_{33}n_3^2 \\
&\quad + (\tau_{12}+\tau_{21})n_1n_2 + (\tau_{13}+\tau_{31})n_1n_3 + (\tau_{23}+\tau_{32})n_2n_3
\end{aligned}
\tag{1.1.25}
$$

上付き文字の t は転置の意味だ．これから例えば x_1 軸方向の応力は $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$ とおくと垂直応力成分の一つ $\boldsymbol{T}_{(1,0,0)} = \tau_{11}$ が得られる．また，$n_1 = 1/\sqrt{2}, n_2 = 1/\sqrt{2}, n_3 = 0$ $(|\boldsymbol{n}| = 1)$ とおけば，これは単位法線ベクトルが x_1 軸と x_2 軸とのなす角 $\pi/4$ の方向を向いている場合だね，その場合の応力は

$$
T_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)} = \frac{1}{2}(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{12}+\tau_{21}) = \frac{1}{2}(\tau_{11}+\tau_{22}) + \tau_{12} \tag{1.1.26}
$$

で与えられる．最後の式の変形は応力テンソルは対称テンソルという性質を使った. 対称テンソルの話はまだしていなかったけど．いまのところ $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ というものだと思ってくれればいい. いずれにしてもこの場合は垂直応力に加えてせん断応力が顔をだしてくるね.

- エミリー：せん断応力というのは，物体内部のある面の，面に平行方向にすべらせるように作用する応力のことね.
- K氏：そうだね．さて，テンソルとは何だ！ということについて，いままでのお話で大体のイメージがつかめたと思う．第１話はこの辺りでお開きとしよう．第１話ではテンソルをベクトルに作用してベクトルを生みだす線形作用素という面から紹介したけど，第２話ではテンソルを別の面から定義してみよう．また，テンソルの和や差，積などの演算の話をする予定だ．楽しみにして.
- エミリー：テンソルのいろいろなことが紹介されるのね．楽しみだわ.